Préparation bac : intégration 1/3

Ex 01*

Soit : $\boldsymbol{I = \int_0^{\ln(5)} \frac{1}{e^x+1}dx}$**, pour tout** $\boldsymbol{x \in \mathbb{R}}$**, on pose :** $\boldsymbol{f(x) = \frac{1}{e^x+1}}$.

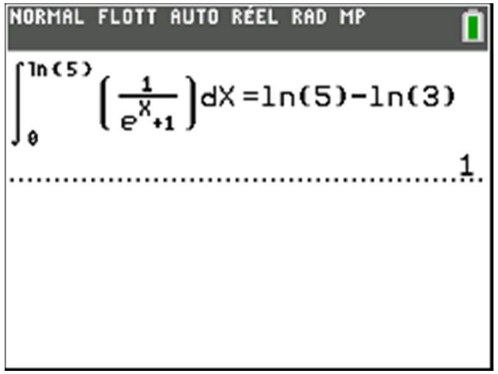
1. **Déterminer des constantes réelles a et b telles que :**
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = a + b \times \frac{e^x}{1+e^x}$$
2. **En déduire les primitives de f sur $\mathbb{R}$.**
3. **Déterminer la valeur exacte de I.**

Corrigé

1. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a :
$$a + b \times \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{a(1+e^x)}{1+e^x} + \frac{be^x}{1+e^x} = \frac{a + ae^x + be^x}{1+e^x} = \frac{(a+b)e^x + a}{1+e^x}$$
On doit donc avoir pour tout réel x :
$$\frac{1}{1+e^x} = \frac{(a+b)e^x + a}{1+e^x}$$
autrement dit :
$$\frac{0e^x + 1}{1+e^x} = \frac{(a+b)e^x + a}{1+e^x}$$
Par identification on obtient :
$$\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ 1 + b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}$$
On a donc :
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$$

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, posons : $u(x) = e^x + 1$, d'où : $u'(x) = e^x$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$:
$$1 - \frac{e^x}{e^x+1} = 1 - \frac{u'(x)}{u(x)}$$
Or, une primitives de $\frac{u'}{u}$ $(u > 0)$ est $\ln(u)$, donc en notant F une primitive de f continue sur $\mathbb{R}$, on a :
$$\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x - \ln(u(x)) + \mathrm{k}$$
soit finalement : $\boldsymbol{\forall x \in \mathbb{R}, F(x) = x - \ln(e^x+1) + k}$

3. On a :
$$I = \int_0^{\ln(5)} f(x)dx$$
avec f continue sur $[0; \ln(5)\,]$ et F est l'une des primitives de f sur cet intervalle donc :
$$\int_0^{\ln(5)} f(x)dx = [F(x)]_0^{\ln(5)}$$
Or
$$\begin{aligned}
&[F(x)]_0^{\ln(5)} \\
&= [x - \ln(e^x+1)]_0^{\ln(5)} \\
&= \ln(5) - \ln\left(e^{\ln 5} + 1\right) - (0 - \ln(e^0 + 1)) \\
&= \ln(5) - \ln(5+1) - 0 + \ln(1+1) \\
&= \ln(5) - \ln(6) + \ln(2) \\
&= \ln(5) - \ln(2 \times 3) + \ln(2) \\
&= \ln(5) - (\ln(2) + \ln(3)) + \ln(2) \\
&= \ln(5) - \ln(2) - \ln(3) + \ln(2) \\
&= \ln(5) - \ln(3)
\end{aligned}$$
Finalement : $\boldsymbol{I = \ln(5) - \ln(3)}$.



Ex 02*

On pose :

$$\boldsymbol{A = \int_0^1 \frac{1}{e^x + 2}\,dx \ \text{ et } \ B = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x + 2}\,dx}$$

1. **Calculer $2A + B$.**
2. **Calculer B.**
3. **Déduire des questions précédentes la valeur de A.**

Corrigé

1. On a :

$$\begin{aligned}
&2A + B \\
&= 2\int_0^1 \frac{1}{e^x+2}dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx \\
&= \int_0^1 2 \times \frac{1}{e^x+2}\,dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx \\
&= \int_0^1 \frac{2}{e^x+2}\,dx + \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}\,dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{e^x+2} + \frac{e^x}{e^x+2}\right)dx \\
&= \int_0^1 \frac{e^x+2}{e^x+2}dx \\
&= \int_0^1 1\,dx \\
&= [x]_0^1 \\
&= 1 - 0 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boldsymbol{2A + B = 1}$.

2. Calcul de B.

$$B = \int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2}$$

Posons $u(x) = e^x + 2$, d'où : $u'(x) = e^x$, on a pour tout réel x :

$$\frac{e^x}{e^x+2} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Or, une primitive de $\frac{u'}{u}$ $(u > 0)$ est $\ln(u)$ donc une primitive de $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+2}$ est $x \mapsto \ln(u(x))$, c'est-à-dire : $x \mapsto \ln(e^x + 2)$.

Comme de plus $x \mapsto \frac{e^x}{e^x+2}$ est continue sur $[0; 1]$, on en déduit :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{e^x+2} = [\ln(e^x+2)]_0^1$$

Or,

$$\begin{aligned}
&[\ln(e^x+2)]_0^1 \\
&= \ln(e^1+2) - \ln(e^0+2) \\
&= \ln(e+2) - \ln(1+2) = \ln(e+2) - \ln(3)
\end{aligned}$$

Donc : $\boldsymbol{B = \ln(e+2) - \ln(3)}$.

3. Calculons A.

On a montré que $2A + B = 1$, or $B = \ln(e+2) - \ln(3)$ donc :

$$2A + \ln(e+2) - \ln(3) = 1 \Leftrightarrow 2A = 1 - \ln(e+2) + \ln(3)$$

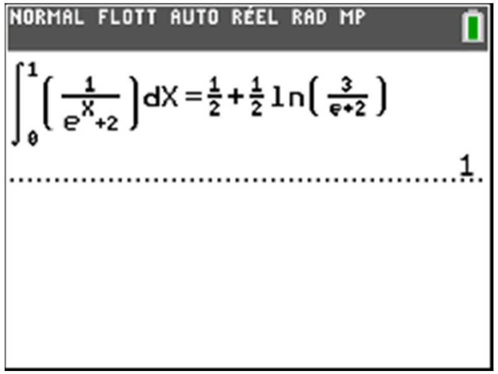
$$\Leftrightarrow 2A = 1 + \ln\left(\frac{3}{e+2}\right) \Leftrightarrow A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{e+2}\right)$$

Résumons :

$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{e+2}\right)}$$

Autrement dit :

$$\boldsymbol{\int_0^1 \frac{1}{e^x+2}\,dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{3}{e+2}\right)}$$



Ex 03** **[d'après bac]**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $\boldsymbol{u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx}$

1. **Calculer :** $\boldsymbol{u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx}$**.**
2. **Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:** $\boldsymbol{u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}}$.
3. **Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.**
4. **Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 0.**
5. **Déduire des questions précédentes que la suite (u_n) est convergence et déterminer sa limite.**

Corrigé

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$

1. Calcul de $u_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx$.

   Une primitives de $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est $x \mapsto \ln(x+1)$ et comme $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ est continue sur $[0;1]$, on a:

   $$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = [\ln(x+1)]_0^1 = \ln(1+1) - \ln(0+1) = \ln(2) - \ln(1)$$
   $$= \ln(2) - 0 = \ln(2)$$

   Finalement : $\boldsymbol{u_0 = \ln(2)}$.

2. Démontrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} + \frac{x^n}{1+x}\right)dx$$
   $$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}+x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx = \int_0^1 x^n \times \frac{x+1}{x+1}dx$$
   $$= \int_0^1 x^n \times 1\,dx = \int_0^1 x^n\,dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1^{n+1}}{n+1} - \frac{0^{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} - 0$$
   $$= \frac{1}{n+1}$$

   On a donc bien : $\forall \in \mathbb{N}$ **:** $\boldsymbol{u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}}$.

3. Démontrons que (u_n) est décroissante.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, on a :

   $$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \left(\frac{x^{n+1}}{1+x} - \frac{x^n}{1+x}\right)dx$$
   $$= \int_0^1 \frac{x^{n+1}-x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}dx$$

   Or, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$on a $x^n \geqslant 0$, $x-1 \leqslant 0$ et $1+x > 0$ donc $\frac{x^n(x-1)}{1+x} \leqslant 0$

   puis en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

   $$\int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}dx \leqslant 0$$

   autrement dit : $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}$,$u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ donc $\boldsymbol{(u_n)}$ **est décroissante**.

4. **Démontrer que la suite (u_n) est minorée par 0.**

   Pour tout $x \in [0;1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $x \geqslant 0$ donc $x^n \geqslant 0$.

   On a : $x \geqslant 0$ donc $x+1 \geqslant 1 > 0$ donc : $\frac{x^n}{1+x} \geqslant 0$.

   Puis en intégrant dans l'ordre croissant des bornes :

   $$\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\,dx \geqslant \int_0^1 0\ dx$$

   autrement dit : $u_n \geqslant 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ et 0 est une constante donc la suite $\boldsymbol{(u_n)}$ **est minorée par** $\boldsymbol{0}$.

5. La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) est convergente.

   Notons ℓ sa limite. On a vu que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$ donc les deux membres de cette égalité ont même limite.

   Or $u_{n+1} \to \ell$ et $u_n \to \ell$ donc $u_{n+1} + u_n \to 2\ell$ et $\frac{1}{n+1} \to 0$ donc $2\ell = 0$ d'où $\ell = 0$.

   Conclusion :

   $$\boldsymbol{\lim_{n\to+\infty} u_n = 0}$$